

DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES CHILENOS DE EDUCACIÓN BÁSICA EN LA CONSTRUCCIÓN DE DIAGRAMAS DE BARRAS

Danilo Díaz–Levicoy
dddiaz01@hotmail.com

Carmen Batanero
batanero@ugr.es

Pedro Arteaga
parteaga@ugr.es

Universidad de Granada, España

Recibido: 02/08/2018 **Recibido:** 03/10/2018

Resumen

El objetivo de esta investigación fue identificar las dificultades que los escolares chilenos de 6º y 7º curso muestran en la construcción de diagramas de barras, que es recomendado en las orientaciones escolares chilenas y el gráfico más frecuentemente presentado en los libros de texto chilenos. Para ello se analizan las respuestas de 745 estudiantes a dos tareas, en una de las cuáles se da un listado de datos (por tanto el gráfico a construir tendrá complejidad semiótica 2) mientras en la segunda se debe formar la distribución de frecuencias, para formar un gráfico de complejidad semiótica 3. Los resultados muestran la mayor dificultad en el segundo gráfico, donde se debe formar la distribución de frecuencias, pues mientras el 80% de los estudiantes producen gráficos correctos o parcialmente correctos en la primera tarea, este porcentaje no llega al 50% en la segunda. Se observan dificultades relacionadas con la asignación de rótulos, construcción de las escalas, fijación del rango de la variable, ancho o separación de las barras, omisión de valores o representación de los datos sin resumir. Las diferencias entre los dos grupos no fueron estadísticamente significativas.

Palabras clave: diagrama de barras, construcción, dificultades, Educación Básica.

CHILEAN BASIC EDUCATION STUDENTS' DIFFICULTIES IN BUILDING BARS GRAPHS

Abstract

This research was aimed to identify the 6th and 7th grades Chilean school children's difficulties in the construction of bar graphs, which are recommended in the curricular guidelines and is the most frequently presented graphic in the Chilean textbooks. We analyse the responses of 745 students to two tasks, in one of which (semiotic complexity 2 graph) students are given a data list, while in the second (semiotic complexity 3 graph) students should form the frequency distribution of data. Results show the higher difficulty in the second graphs, since 80% of students produce correct or partially correct graphs in the first task, this percentage does not reach 50% in the second. There are difficulties related to label assignment, construction of the scales, determination of the variable range, width or separation of bars, omission of values or the representation of non summarized data. The differences between the two groups were not statistically significant.

Keywords: Bar Graphs, Building, Difficulties, Primary Education

Introducción

El frecuente uso de los gráficos estadísticos para transmitir información en medios de comunicación o en la vida laboral (Ainley, Pratt y Nardi, 2001; Cavalcanti, Natrielli y Guimarães, 2010) los han llevado a formar parte de la cultura estadística, que es hoy deseable para cualquier ciudadano (Gal, 2002; English y Watson, 2015; Molina-Portillo, Contreras, Godino y Ruz, en prensa; Watson, 2013).

Desde el punto de vista curricular, en Chile se han incluido en los últimos años temas de estadística y probabilidad desde los primeros cursos de la Educación Básica, en concordancia a las tendencias internacionales. Concretamente, las directrices curriculares del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2012) introducen los gráficos estadísticos en todos los cursos desde el primero, en el bloque temático de *Datos y probabilidades*, para dar respuesta:

(...) a la necesidad de que todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades. Estos conocimientos les permitirán reconocer gráficos y tablas en su vida cotidiana (MINEDUC, 2012, p. 5)

En estas directrices curriculares, los diagramas de barras se introducen en forma esquemática en los primeros cursos, añadiendo posteriormente las escalas, hasta llegar a los diagramas de barras dobles en sexto de Educación Básica. Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea (2016) realizan un estudio en que se muestra que estas recomendaciones se reflejan en los libros de texto, con predominio del gráfico de barras en todos los cursos, además de incluirse en los libros de texto todos los gráficos recomendados en las directrices curriculares (e.g., sectores, líneas, puntos).

La relevancia del diagrama de barras se confirma también los medios de comunicación escritos (Cavalcanti et al., 2010), los libros de texto de matemática en Brasil (Silva, 2013) Chile y España (Díaz-Levicoy et al., 2016), Costa Rica (Jiménez-Castro, 2017) y Guatemala y Venezuela (Salcedo, 2016).

Pese a su importancia evidente, algunas investigaciones informan sobre las dificultades para leer y construirlos en diversos colectivos de estudiantes. La investigación previa con estudiantes de Educación Básica es, sin embargo, escasa e inexistente la relacionada con estudiantes chilenos. En consecuencia, el objetivo de este trabajo fue identificar los errores más frecuentes de los estudiantes chilenos de 6º y 7º cursos de Educación Básica en la construcción de diagramas de barras y comparar la dificultad de esta tarea cuando los datos se le dan

agrupados y cuando deben ellos mismos formar la distribución de frecuencias.

En lo que sigue describimos los fundamentos y método del estudio, presentamos y discutimos sus resultados, finalizando con algunas implicaciones para la enseñanza del tema.

Marco teórico

Nuestro estudio se apoya en algunas investigaciones que resaltan la actividad implicada en el trabajo con el gráfico estadístico. Una correcta construcción del mismo exige tener en cuenta los elementos que lo conforman, que son los siguientes (Kosslyn, 1985; Wilkinson, 2005):

- *El plano de fondo.* Es la parte del gráfico que se utiliza como soporte para su construcción; aunque frecuentemente es un fondo liso, puede incluir dibujos o fotografías relacionados con la información representada.
- *Estructura del gráfico* o componentes que proporcionan información y sobre el cual están representada. En el caso de los diagramas de barras, la estructura principal está formada por el eje cartesiano bidimensional.
- *Contenido pictórico.* Corresponden a los elementos usados para la representación de la información, como cada barra del gráfico de barras.
- *Rótulos.* Son las expresiones, palabras y números que informan sobre las variables representadas, la escala y las unidades en el título del gráfico y los respectivos ejes.

Curcio (1987, 1989), por su parte, describe los siguientes elementos constituyentes de los gráficos estadísticos.

- *Palabras o expresiones* que aparecen en el título del gráfico, o las etiquetas situadas en los ejes y que definen las escalas y que sitúan al lector del gráfico en el contexto de la información; por ejemplo permiten identificar las variables representadas.
- *Contenido matemático* subyacente. Son los objetos matemáticos usados para representar la información; por ejemplo el conjunto numérico al cual pertenecen los datos y/o frecuencias.
- *Convenios específicos de cada gráfico estadístico.* Por ejemplo en el gráfico de barras, cada frecuencia es proporcional a la altura de la barra que lo representa, cada barra tiene el mismo ancho y la distancia entre ellas es uniforme.

Otros autores, como Friel, Curcio y Bright (2001), han propuesto elementos como: el título y etiquetas el marco del gráfico los) especificadores y el fondo y concuerdan en la importancia que tiene cada elemento en la construcción del gráfico para facilitar la lectura de la información que en ellos se desea transmitir.

Esta variedad de elementos del gráfico implica que la actividad de lectura o construcción de un gráfico es una actividad semiótica compleja, pues se requieren múltiples procesos interpretativos, de cada uno de los elementos descritos y del gráfico en su conjunto (Wilkinson, 2005). Es importante tener en cuenta, sin embargo, que la complejidad de esta actividad no es equivalente para todos los gráficos. Para destacar este hecho, Arteaga y cols. (Arteaga, 2011; Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010) describen cuatro niveles de complejidad semiótica en la construcción de un gráfico estadísticos, que dependen de los objetos matemáticos y estadísticos que se movilizan en su construcción y que son los siguientes.

- *N1. Representación de datos individuales.* Los autores indican que un gráfico de este nivel se asocia a la representación de datos aislados, un dato o una porción de ellos, sin que se calculen las frecuencias cuando un dato se repite.
- *N2. Representación de una lista de datos, sin llegar a resumir su distribución.* Es la representación donde cada dato se representa en el orden dado en un listado, sin agruparlos y sin utilizar las ideas de frecuencia y distribución de frecuencias, aunque se maneja la idea de variable. El orden del listado y la representación de los datos no suele coincidir con el orden numérico.
- *N3. Representación de una distribución de datos.* Es la representación de una distribución, agrupando los datos que corresponden al mismo valor de la variable y calculando las frecuencias respectivas. Los datos son mostrados en forma ordenada, según el orden numérico.
- *N4. Representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico.* Corresponde a la representación de dos o más distribuciones de frecuencias en el mismo gráfico estadístico.

Antecedentes

Además de en el marco teórico, nuestro estudio se apoya en otros centrados en la construcción de diagramas de barras por parte de estudiantes y otros que describen los errores más comunes en la elaboración de gráficos estadísticos.

Construcción de diagramas de barras

La lectura y construcción de diagramas de barras han sido consideradas en algunas investigaciones realizadas con estudiantes. Mientras la primera es generalmente sencilla (Fernández y Morais; 2011; Fernández, Santos y Pereira, 2017; Guimarães, 2002; Postigo y Pozo, 2000; Sharma, 2013; Wu, 2004), existen algunas evidencias de que la construcción de diagrama de barras es más difícil, como detallamos a continuación.

Guimarães (2002) estudió la interpretación y la construcción de gráficos de barras por 107 estudiantes de 3° curso de Educación Básica en Brasil, a los cuales planteó dos actividades de construcción, una con datos nominales y otra con ordinales. Los resultados evidencian que los estudiantes responden con mayor éxito cuando se trabaja con datos nominales (47,7%) que con ordinales (19,6%). La autora sugiere que una posible justificación de esta diferencia es que en la primera tarea los valores de las frecuencias eran menores a diez y en el segundo mayores, por lo que no era posible identificar la unidad de la escala con una cuadrícula de la plantilla entregada para la construcción. Dentro de las dificultades de los niños observó problemas para la definición de la escala, construcción de una representación diferente a un gráfico de barras, no asignar etiquetas a las barras y errores u omisión en la representación de valores de la variable.

Bivar (2012) estudia la construcción de gráficos por 16 estudiantes de 5° curso de Educación Básica en Brasil. Mientras el 62% de los estudiantes realizó correctamente la construcción de un diagrama de barras a partir de una distribución de frecuencias, sólo el 37,5% tuvo éxito cuando se les dio un listado que deben agrupar. Los estudiantes, en su mayoría, asignaron un título propio a estas representaciones, pero se observaron dificultades en la asignación de etiquetas, y escalas (no se dan los porcentajes de estos errores). De modo similar, Ruiz (2015) estudió los errores de 31 estudiantes de 5° grado de Educación Básica en Colombia en tres actividades donde debían construir un gráfico con la información de un pictograma o a partir de una o dos distribuciones de datos entregados en tablas. El gráfico que usaron con mayor frecuencia fue el diagrama de barras y se encontraron errores para establecer las frecuencias, definir escalas y asignación de rótulos.

Cruz (2013), plantea dos actividades que involucran, la construcción de un gráfico de barras a 22 estudiantes 3° de Educación Básica en Portugal. Entre los errores encuentra la omisión de la etiqueta del eje (67% en eje X y el 62% en el Y), construcción de barras con diferentes anchuras (57%) o con una separación no uniforme entre barras o muy alejadas (76% y 9%, respectivamente). El 24% de los estudiantes no seleccionó una escala proporcional, o representó los valores de la tabla, en el orden en que aparecen.

Fernandes, Morais y Lacaz (2011) analizan la construcción de gráficos estadísticos con datos (discretos y continuos) en 108 estudiantes de 9° grado. Sus estudiantes presentaron mayor éxito al construir un gráfico para datos discretos (61% correctas y parcialmente correctas). Entre

los errores observados se tienen la construcción de un gráfico que no era adecuado a la naturaleza de los datos, ausencia de etiquetas y títulos en los ejes y la definición de una escala no proporcional. Wu (2004), por su parte, en su estudio con 907 estudiantes de secundaria (13-15 años), reportó errores de cálculo (19,4%), errores en la asignación de títulos, en la escritura de las etiquetas y en determinar los especificadores adecuados al gráfico (98,3%), errores de escala (90%) y confusión entre frecuencia y errores de valor de datos (2,5%).

Evangelista, Oliveira y Ribeiro (2014) piden construir dos gráficos estadísticos, sin especificar su tipo, a 46 estudiantes de 5° año de Educación Básica en Brasil. Los resultados muestran que el 88,1% de los estudiantes fue capaz de construirlos, ningún estudiante asignó un título general al gráfico y mientras que solo el 3,3% fue capaz de asignar nombre a los ejes. La mayoría de los estudiantes (77,2%) consiguió describir las variables del eje X, y mientras que solo el 19,6% estableció adecuadamente la escala.

En consecuencia, estos trabajos indican diferentes tipos de errores en la construcción de gráficos por estudiantes de diversos niveles educativos. Para completarlos, nuestro objetivo será evaluar los errores que comenten los estudiantes chilenos de 6° y 7° grados en la construcción del gráfico de barras, comparando los tipos de error y la dificultad de la tarea cuando los datos se dan agrupados o sin agrupar y comparando también el desempeño de los dos grupos de estudiantes.

Errores en la elaboración de gráficos estadísticos

Tendremos también en cuenta otros trabajos que estudian los errores comunes la construcción de gráficos, generalmente por parte de futuros maestros de Educación Básica. Entre ellos encontramos a Bruno y Espinel (2005), que estudian la construcción de histogramas y polígonos de frecuencias por 39 futuros profesores, mostrando errores en la definición de los intervalos, uso de barras no adosadas en los histogramas (como si se tratara de un gráfico de barras), no colocar etiquetas, omitir intervalos de frecuencia nula y omitir los intervalos de frecuencia nula.

Para la construcción de un gráfico estadístico se debe considerar, en primera instancia, el tipo de gráfico que se debe utilizar, ya que no todos los gráficos son adecuados según la naturaleza de los datos. Con frecuencia los estudiantes realizan una elección errada, como se observa en el trabajo de Li y Shen (1992) donde se utilizan polígonos de frecuencias para variables cualitativas y, en otras ocasiones, se representan variables no relacionadas en un

mismo gráfico.

Una vez elegido el tipo de gráfico, es importante la elección de una escala que permita representar la información de una manera óptima. En este sentido, Li y Shen (1992) encontraron que sus estudiantes cometían los siguientes errores:

- Elegir una escala inadecuada, es decir, que el gráfico no permita abarcar toda la variación de la variable que se desea representar o que la escala sea muy amplia cuando la variación de la variable no lo es.
- Omitir las escalas en alguno de los ejes.
- No señalar el origen de coordenadas del gráfico estadístico.
- No fijar las divisiones suficientes en las escalas de los ejes (X e Y), dificultando la lectura y la interpretación del gráfico estadístico.

Esta clasificación es revisada y adaptada por Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras (2016) que diferencian los siguientes errores en las escalas:

- Escalas no proporcionales a las magnitudes representadas, donde el estudiante no es capaz de establecer una correspondencia adecuada entre la proporcionalidad numérica de las frecuencias y la correspondiente proporcionalidad geométrica en los gráficos.
- Valores numéricos faltantes en la recta real. Cuando en una variable numérica un determinado valor no aparece en los datos, en lugar de conservar este valor en el eje que representa las categorías, dicho valor se omite
- Rótulos confusos, valores erróneos en las escalas o faltantes.
- Barras no centradas en el valor de la categoría en los gráficos de barras.
- Escala inapropiada, cuando no cubren el campo de variación de la variable representada o las que contienen subdivisiones excesivas

Por otro lado los autores encuentran también una serie de gráficos claramente inadecuados para completar la tarea solicitada, en los casos siguientes:

- Altura de la barra, área del rectángulo, o del sector circular no proporcional a la frecuencia. Supone un desconocimiento de los convenios en la construcción del gráfico en cuestión.
- Intercambiar frecuencia y valor de la variable en los ejes. Al formar la distribución de frecuencias se establece una función donde, a cada valor de la variable, se asigna la frecuencia con que aparece. Sin embargo, algunos estudiantes confunden la variable (que

sería variable independiente en esta función) con la frecuencia (que sería la variable dependiente).

- Representar variables no relacionadas o las medias o medianas de variables no relacionadas en el mismo gráfico. En este caso no se comprende el propósito del gráfico.

Método

En este apartado describimos la muestra del estudio, las tareas planteadas y el procedimiento de análisis.

Muestra

Participaron en el estudio un total de 745 estudiantes, 380 de 6º curso (11-12 años) y 365 de 7º curso (12-13 años), con una edad media de 12,3 años, siendo el 50,9% mujeres y el 49,1% hombres, pertenecientes a 13 escuelas de diferentes ciudades de Chile (Osorno, Castro, Queilen, Puerto Octay, La Unión, Viña del Mar y Ñuñoa), lo que asegura una buena representatividad geográfica y de características socioeconómicas de los participantes. Entre los centros que prestaron su colaboración, encontramos escuelas de dependencia pública (municipalizada) y concertada (particular subvencionada). El número de estudiantes por centro varió entre 14 y 108 (según el tamaño del centro) y en 11 de los 13 centros participaron estudiantes de los dos cursos.

Las tareas fueron completadas individualmente y por escrito exactamente en las mismas condiciones en todos los grupos; durante una de las sesiones de la asignatura de matemática y todos los estudiantes finalizaron antes del tiempo fijado para la clase.

Tareas planteadas

Para la recogida de los datos de la investigación se aplicó un cuestionario individual con dos actividades en las que se pide construir un diagrama de barras (Figura 1), que se han extraído y adaptado de libros de texto analizados en un estudio previo (Díaz-Levicoy et al., 2016). En la primera actividad, adaptada de Bivar (2012, p. 41) se proporciona un listado de datos y no es necesario formar una distribución de frecuencias. Por tanto se pide construir un diagrama de barras de complejidad semiótica 2 en la clasificación de Arteaga (2011).

En la segunda actividad adaptada de un libro de texto de Educación Básica (Batarce, Cáceres y Kükenshöner, 2013, p. 333) se requiere formar la distribución de frecuencias de la variable a representar, lo que implica clasificar los datos y obtener las frecuencias de cada valor diferente del número de hermanos, es decir construir un diagrama de barras de complejidad semiótica 3 (Arteaga, 2011). En ambas actividades se proporciona una plantilla cuadrículada

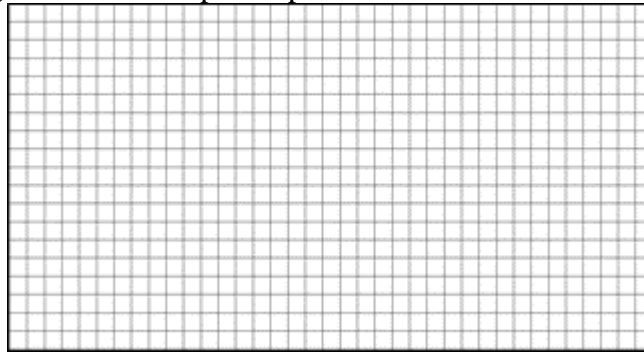
para ayudar en la construcción de la escala.

Figura 1. Tareas propuestas a los estudiantes

Tarea 1. En la siguiente tabla mostramos la altura en metros de algunas especies de árboles.

Especie	Altura
Álamo	12
Higuera	6
Castaño	25
Araucaria	30
Palmera	20
Roble	12

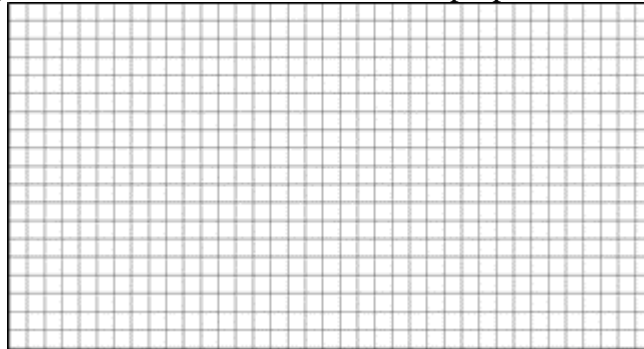
Construye un diagrama de barras para representar estos datos.



Tarea 2. A continuación se muestran los resultados de una encuesta con la pregunta: ¿cuántos hermanos tienes?

0, 1, 3, 2, 2, 3, 2, 4, 1, 2, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 0, 2, 4, 0, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 2

Construye un diagrama de barras con la información proporcionada.



Procedimiento y criterios de análisis

Este trabajo sigue una metodología de tipo cualitativa y descriptiva basada en el análisis de contenido, que estudia la naturaleza del discurso y el análisis sistemático de documentos escritos (Zapico, 2007). Se analiza la respuesta de cada estudiante para ambas actividades, y siguiendo un proceso inductivo y cíclico se han clasificado los gráficos producidos hasta obtener las categorías en los que se clasifican. Para asegurar la fiabilidad de la codificación se

discutieron las categorías y asignación de casos a las mismas entre los tres autores del trabajo.

Resultados

Como resultados, en primer lugar analizamos el grado de corrección de los gráficos producidos y seguidamente se describen los errores identificados. Finalmente se presenta una síntesis de los resultados comparando los dos cursos participantes.

Corrección de los gráficos

El grado de corrección del gráfico construido se clasificó en los tres tipos propuestos por Arteaga et al. (2016):

Gráfico correcto o básicamente correcto. Cuando el diagrama de barras está bien construido, respetando los convenios de construcción y sus elementos estructurales (Kosslyn, 1985, Wilkinson, 2005). Es decir, se ha definido una escala adecuada y representa de manera correcta las categorías y frecuencias o valores de la variable, asignando rótulos claros y precisos. Se incluye aquellos diagramas que poseen líneas adicionales, como lo consideran Arteaga et al. (2016) o con ausencia del título general. Un ejemplo de gráfico correcto se presenta en la Figura 2, donde el estudiante E487 construyó correctamente el diagrama de barras en la actividad 1. Para ello, establece una escala adecuada y construye barras de longitud proporcional a los valores de la variable. Tanto el título general como las etiquetas son adecuados.

Figura 2. Diagrama de barras correcto

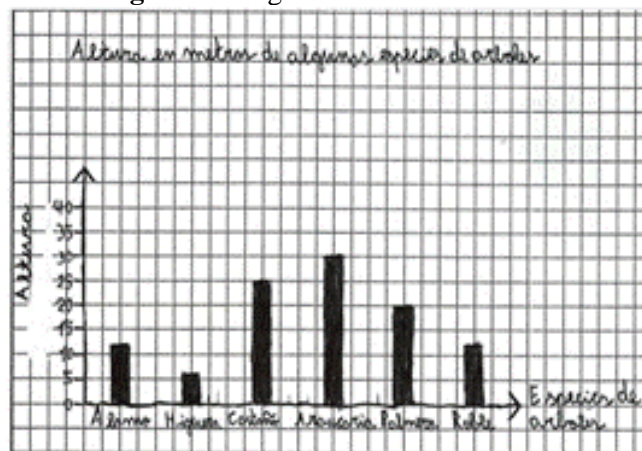


Gráfico parcialmente correcto. Son aquellos diagramas de barra en los que se observa algún error u omisión menor, mientras el resto de elementos del gráfico son correctos. Por ejemplo, las barras tienen diferente separación, se olvida representar algún valor o

los rótulos confusos inexistentes. En la siguiente sección realizaremos un análisis detallado de los tipos de errores que se han aceptado para considerar un gráfico como parcialmente correcto.

Gráficos incorrectos. Cuando el estudiante no es capaz de representar la información en el diagrama de barras, produciendo un gráfico sin sentido para los datos y el contexto dados, o no se respetan los convenios de construcción de diagrama de barras. Los errores asociados a este tipo de gráfico se analizan en la sección siguiente.

En la Tabla 1 presentamos los resultados relacionados con la corrección del gráfico, donde se observa que lo más frecuente fue la respuesta parcialmente correcta, globalmente y en cada grupo. Los resultados son buenos, pues, al considerar las respuestas correctas y parcialmente correctas se alcanza un 75,3% en la primera actividad y un 48,4% en la segunda. Al comparar los dos grupos, los estudiantes de 6° curso responden con mayor éxito la primera pregunta, y los de 7° a la segunda, que a la vez es la que presenta mayor porcentaje de estudiantes que no finalizan el gráfico.

Tabla 1. *Porcentaje de estudiantes según la corrección del gráfico*

Tipo de construcción	6° curso (n=380)		7° curso (n=365)		Total (n=745)	
	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 1	Ítem 2
Correcta	5,8	4,7	6,3	7,9	6	6,3
Parcialmente correcta	72,9	40,3	65,5	44,1	69,3	42,1
Incorrecta	6,1	31,3	5,5	17,8	5,8	24,7
No finalizan	15,3	23,7	22,7	30,1	18,9	26,8

En la primera actividad, en la que se pide construir un diagrama de barras de complejidad semiótica 2 hay un mayor porcentaje de éxito en ambos grupos de estudiantes, sobre todo en los de 6° curso. Los resultados son mejores a los obtenidos en Bivar (2012) (62% de respuestas correctas o parcialmente correctas) y de Fernandes et al. (2011) (61%) y similares a los Evangelista et al. (2014) (81%).

En la segunda actividad, en la que los estudiantes han de formar previamente la distribución, para construir un gráfico de complejidad semiótica 3, disminuye bastante el éxito de la tarea y son los estudiantes de 7° presentan mayor porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas. Estos resultados, son mejores a los alcanzados por los estudiantes de

Bivar (2012) (37,5%), pero inferiores a los reportados por Fernandes et al. (2011) (61%) y Evangelista et al. (2014) (81%), pero estas investigaciones no se pedía agrupar los datos y en las tres últimas investigaciones los estudiantes podían elegir el tipo de gráfico.

Tipos de errores en las respuestas parcialmente correctas o incorrectas

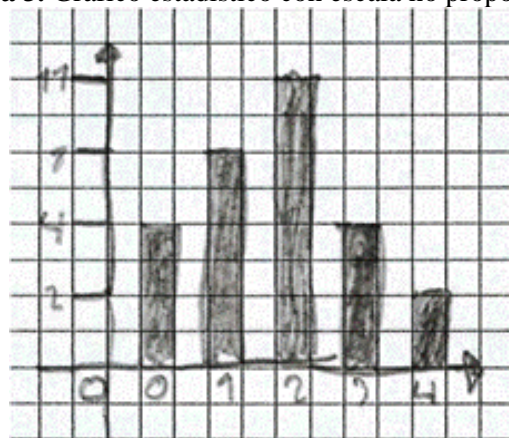
Simultáneamente a la anterior categorización se han clasificado los errores que se observan en los gráficos producidos y que analizamos a continuación. En primer lugar presentamos los que hemos admitido en los gráficos considerados parcialmente correctos y en segundo los incluidos en los gráficos incorrectos.

Errores de los gráficos parcialmente correctos

Teniendo en cuenta los errores citados en investigaciones previas se han definido las siguientes categorías.

Escala no proporcional. En la construcción de las escalas en uno de los ejes no se respeta la correspondencia entre la proporcionalidad numérica y la geométrica. Es decir, a diferencias numéricas iguales no corresponden intervalos de la misma longitud, error observado en investigaciones previas (e.g., Arteaga et al., 2016; Bruno y Espinel, 2005; Cruz, 2013; Evangelista et al., 2014). Un ejemplo es el gráfico construido por E193 (Figura 3), para la actividad 2, donde se asignan dos cuadros para representar 2, 4 y 3 unidades. También hemos incluido en esta categoría los gráficos en que el cero no está situado en la intersección de los ejes.

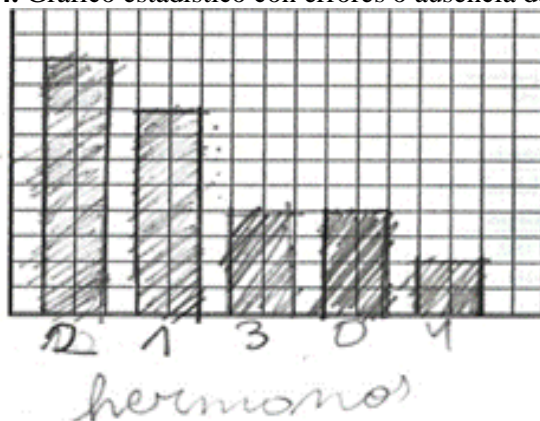
Figura 3. Gráfico estadístico con escala no proporcional



Errores en los rótulos o ausencia de rótulos. Corresponde a aquellos diagramas de barra que no tienen rótulo en algún eje, o faltan las etiquetas de las escalas, lo que dificulta la comprensión de la información mostrada en el gráfico, para identificar la escala y las

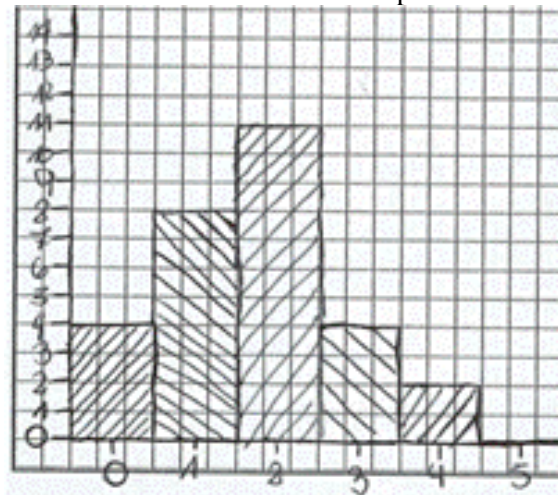
unidades de medida usadas (Curcio, 1987). Estos errores se han observado previamente en otras investigaciones (e.g., Evangelista et al., 2014; Fernandes et al., 2011; Wu, 2004). En la Figura 4 vemos un ejemplo en el gráfico realizado por E409 para la actividad 2, donde si bien se identifican la variable y las categorías del eje X no asigna título ni rótulos sobre el eje Y, por lo que no se informa sobre la escala que se usa en la construcción. Por otro lado, las categorías no siguen el orden numérico (error también observado en Arteaga et al., 2016).

Figura 4. Gráfico estadístico con errores o ausencia de rótulos



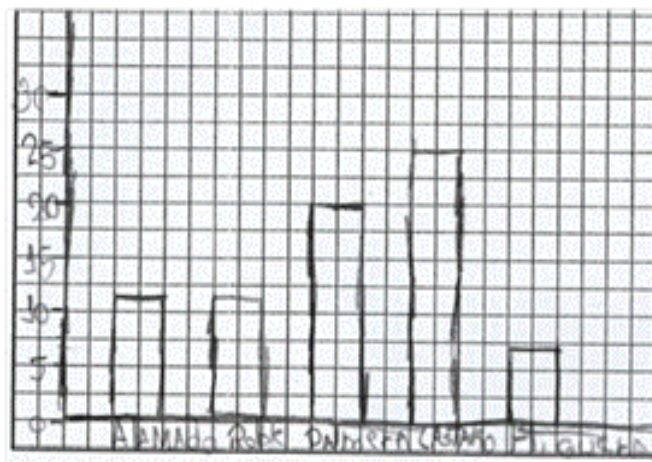
Barras no separadas o de diferente anchura. En esta categoría incluimos los gráficos en los que las barras del diagrama que se construye no se separan entre sí y no es claro si el estudiante confunde el gráfico con un histograma. También consideramos el caso en que cada barra tiene diferente ancho, las barras no están centradas sobre la categoría que le corresponde, la separación entre barras no es uniforme o las barras no son paralelas. Algunos de estos errores, que implican el desconocimiento de los convenios de construcción, aparecieron en Arteaga et al. (2016). Bruno y Espinel (2005), Cruz (2013) y Ruiz (2015). Ejemplo de esta categoría es la respuesta de E86 (Figura 5) para la actividad 2, donde se realiza un diagrama en la que se leerían las frecuencias asociadas a datos continuos, donde los valores registrados en el eje X corresponderían a las marcar de clases, como se hace en los histogramas, los que no se corresponde a la naturaleza de los datos. Además, en esta construcción no se asignan títulos a los ejes.

Figura 5. Gráfico estadístico con errores en la separación o ancho de las barras



Omite un valor en la construcción del gráfico. Denominado error de valores faltantes por Bruno y Espinel (2005) y Arteaga et al. (2016) y se observa cuando el estudiante omite en la construcción uno de los valores (dato o frecuencia). Se encontró también en estudios previos (Evangelista, 2014; Guimarães, 2002). Por ejemplo, en la tarea 1, E53 no representa la barra asociada al árbol Araucaria (Figura 6).

Figura 6. Gráfico estadístico con error u omisión en la construcción de un valor



En la Tabla 2 se presentan los resultados, teniendo en cuenta que el mismo estudiante puede cometer más de un error y por tanto el porcentaje global es mayor de 100, lo que también ocurre en la Tabla 3. En la actividad 1 vemos que el error más frecuente es la ausencia de rótulos en los ejes, que alcanza un 65% de los estudiantes de 6° y en el 53,2% de 7° curso, confirmando los hallazgos de investigaciones previas, las que evidencian que los estudiantes no ven el

propósito del título del gráfico y de los ejes (e.g., Bívar, 2012; Cruz, 2013; Fernandes et al., 2011). Evangelista et al (2014) observa que ninguno de los estudiantes de 5° básico que participan en su estudio asigna títulos a los diagramas.

Tabla 2. *Porcentaje de estudiantes que comente diferente tipo de error en los gráficos parcialmente correctos*

Tipo de error	6° curso (n=380)		7° curso (n=365)		Total (n=745)	
	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 1	Ítem 2
Escala no proporcional	35,5	11,6	32,6	15,9	34,1	13,7
Errores o ausencia de rótulos	65	34	53,2	34,8	59,2	34,6
Barras no separadas o de distinta anchura	44,2	17,9	32,9	18,4	38,7	18,1
Omite valores	23,4	14,2	21,6	16,7	22,6	15,4

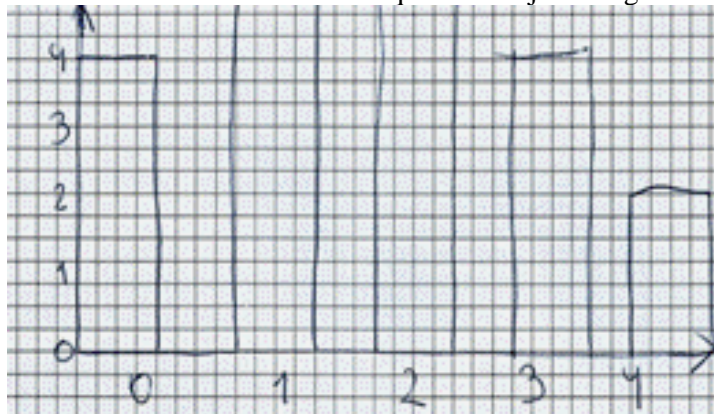
En segundo lugar, tanto a nivel general como por curso, los diagramas presentan diversos errores sobre la construcción de las barras (barras con diferente ancho, separación no uniforme, o segmentos no paralelos), también descritos en estudios previos (Arteaga et al., 2016; Bruno y Espinel, 2005) y Cruz (2013) con el 57% de los sujetos estudiados. En menor medida se observan los errores de *escala no proporcional* (35,5% en 6° y 32,6% en 7°) y *omisión de valores* (23,4% en 6° y 21,6% en 7°), el primero de estos errores aparece los trabajos con estudiantes de formación obligatoria (Cruz, 2013; Ruiz, 2015; Wu, 2004; Evangelista et al., 2014), y con futuros maestros de Educación Básica (Arteaga et al., 2016; Bruno y Espinel, 2005), que llega al 80% en los estudiantes de Evangelista et al. (2014) y al 20% de los descritos por Arteaga et al. (2016).

Los resultados de la segunda actividad son similares. En ella se mantiene la tendencia sobre los dos errores más frecuentes (ausencia de rótulos y barras no separadas o de distinta anchura), mientras que los menos frecuentes (escala no proporcional y omisión de valores) varían en su posición, es decir, que el error menos frecuente es el asociado a la escala no proporcional (11,6% en 6° y 15,9% en 7°).

Errores de los gráficos incorrectos

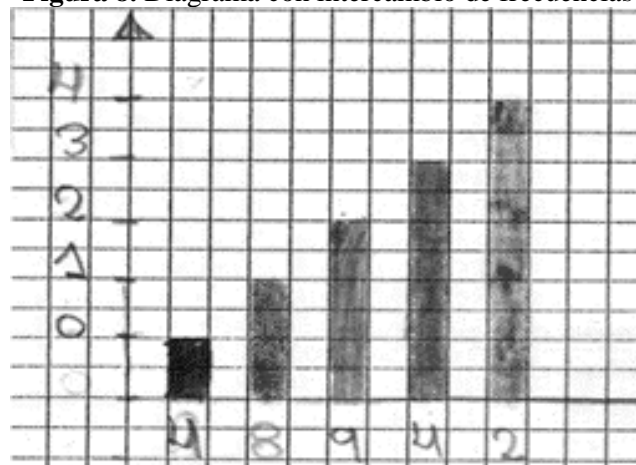
Escala que no refleja el rango de la variable. Cuando el estudiante no establece una escala que permita representar todos los datos (o frecuencias), no reflejando en rango de los mismos (Arteaga et al., 2016; Fernandes et al., 2011). Mostramos un ejemplo en la respuesta que E162 (Figura 7), no es capaz de representar la frecuencia 8 ni 11.

Figura 7. Gráfico estadístico con escala que no refleja el rango de la variable



Intercambiar categorías y valores de la variable. Es un error que ocurre cuando se confunde los conceptos de valor y frecuencia de la variable, por lo que las barras del diagrama se construyen sobre las frecuencias, y su altura está limitada por el valor respectivo (Batanero et al., 2010). Ejemplo a este tipo de error lo vemos en la respuesta que entrega E420 a la pregunta 2 (Figura 8), donde además de cambiar categorías y valores de la variable, no considera el orden de los números en el eje X.

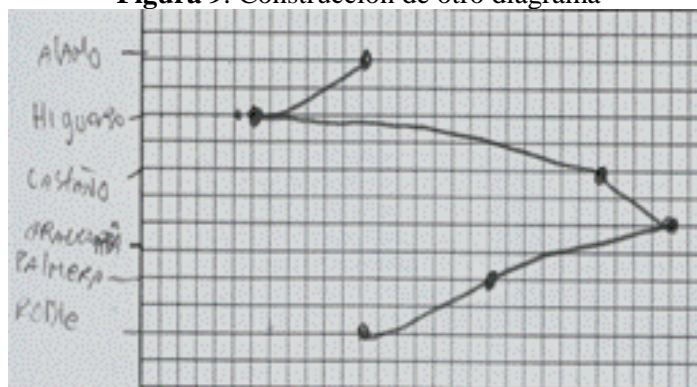
Figura 8. Diagrama con intercambio de frecuencias



Construcción de otro gráfico. Cuando el estudiante construye una representación diferente a la pedida en la actividad, posiblemente porque no recuerdan bien diagrama/gráfico de barras, pese a la relevancia que se le asigna a los libros de texto y en la vida cotidiana. En la Figura 9 mostramos un ejemplo de este tipo de error respecto a la actividad 1, en ella E263 construye un diagrama de líneas con los datos situados en el eje horizontal y las categorías en el vertical, forma poco frecuente de representar la

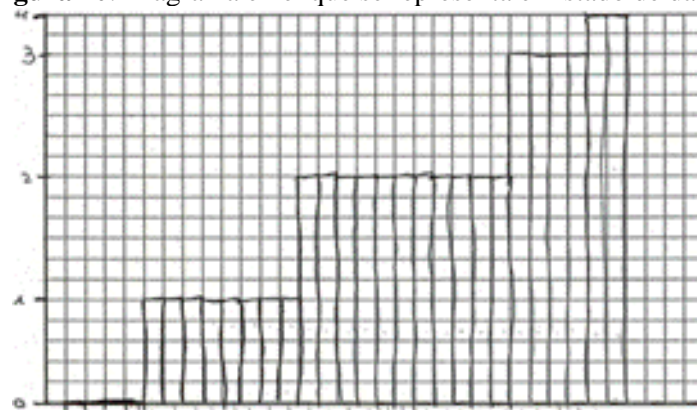
información. El estudiante no asigna título general ni el eje X; además comete errores para ubicar la altura de la Araucaria y la Palmera. Otras representaciones encontradas en esta categoría son pictogramas, diagrama de tallo y hojas, diagrama de puntos e incluso una tabla estadística.

Figura 9. Construcción de otro diagrama



Representación del listado de datos. Es cuando en la segunda actividad no se forma la distribución sino que se representa cada uno de los datos aisladamente, sin obtener las frecuencias necesarias para visualizar con claridad la información. Este error descrito por Arteaga y cols. (Arteaga et al., 2016; Batanero et al., 2010) se presenta en la construcción de E459 (Figura 10), quien ordena cada datos de menor a mayor, para luego representarlos, pero no ve la necesidad de calcular las frecuencias; además presenta error de escala que al momento de realizar la gráfica que trata de subsanar.

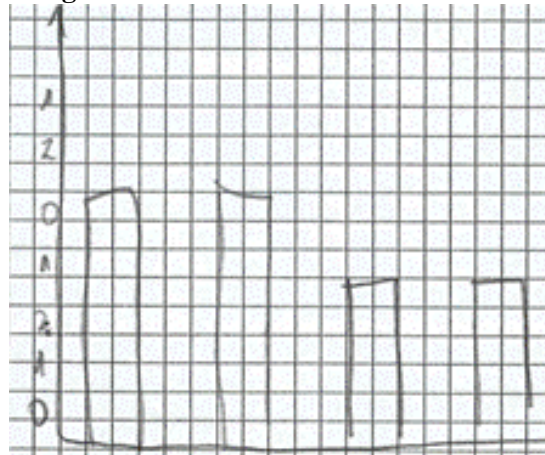
Figura 10. Diagrama en el que se representa el listado de datos



Construcción sin sentido. Corresponde cuando la construcción del estudiante no considera los datos entregados para dicha actividad, por lo que no tiene sentido aparente. Este tipo de respuestas se ve ilustrada en la Figura 11, en ella E233 realiza levantar cuatro barras que no se sabe qué representan, además la escala representada en el eje Y, que

repite número sin sentido.

Figura 11. Gráfico estadístico sin sentido



Como observamos en la Tabla 3, son pocos los estudiantes que tienen estos errores, es decir, que producen gráficos incorrectos. A nivel general, se observan mayor porcentaje de errores, asociados a las construcciones incorrectas, en la actividad 2, en la que predomina no formar la distribución de la variable para representarla y, en su lugar, se representa el listado de datos (15,4%). Dicho error fue descrito por Arteaga y cols. (Arteaga et al., 2016; Batanero et al., 2010) quienes indican que la complejidad semiótica de esta construcción es menor que la de una distribución, porque no se usa la idea de frecuencia o de su distribución. Este error es más frecuente en los estudiantes de 6° (19,5%) que los de 7° (11,2%). Le sigue, y con un porcentaje muy bajo las construcciones sin sentido (3,4%), donde los estudiantes de 6° (4,5%) presentan porcentaje de error que los de 7° (2,2%). En tercer lugar, y apenas con un 3% a nivel general, está el intercambiar categorías por frecuencias. En menor porcentaje está la construcción un gráfico diferente al pedido (2,1%) y cuando la escala establecida no alcanza para cubrir los diferentes valores de la variable (0,8%).

Tabla 3. Porcentaje de estudiantes según tipo de error en las construcciones parcialmente correctas

Tipo de error en construcción incorrecta	6° curso (n=380)		7° curso (n=365)		Total (n=745)	
	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 1	Ítem 2
Escala que no refleja el rango	3,2	1,1	2,2	0,5	2,7	0,8
Representar el listado de datos	--	19,5	--	11,2	--	15,4
Confundir categoría y valor	0,3	3,2	0,3	2,7	0,3	3
Construir otro gráfico	1,1	3,2	1,9	1,1	1,5	2,1
Construcción sin sentido	1,6	4,5	1,1	2,2	1,3	3,4

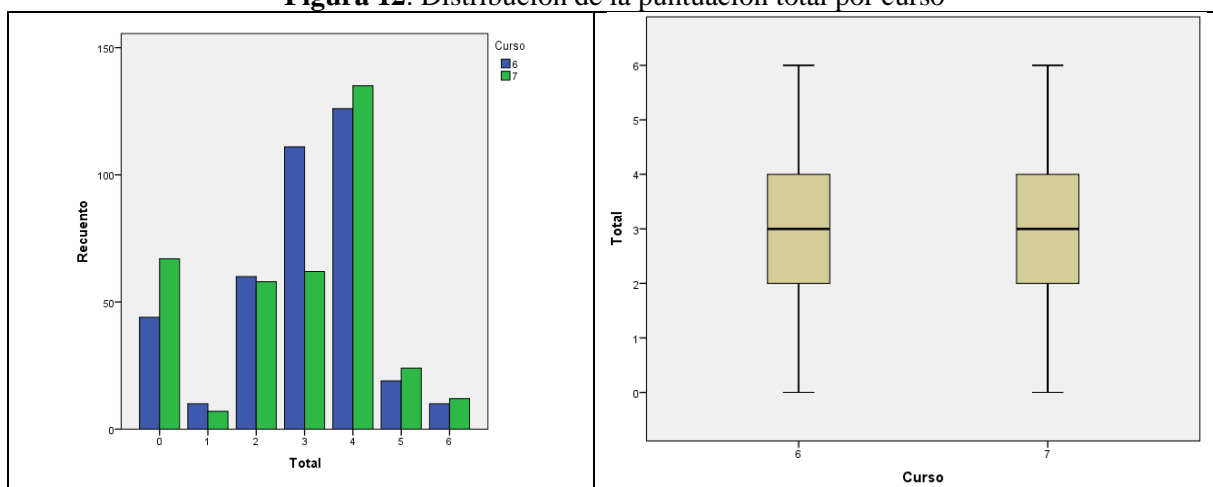
En la primera actividad los errores se presentan en porcentajes bajos y donde el más frecuente es cuando la escala establecida por el estudiante no permite representar todos los valores (2,7% en general).

Síntesis de resultados

Para tener una visión global de los resultados obtenidos por los estudiantes, asignamos una puntuación a cada uno de los dos gráficos, de acuerdo con su corrección (0: si no realiza la construcción del diagrama; 1: si la construcción es incorrecta; 2: cuando la construcción es considerada parcialmente correcta; y 3 cuando el diagrama construido es correcto o básicamente correcto). Por ello, un estudiante podría alcanzar 0 puntos si no realiza la construcción o un máximo de 6 puntos si realiza ambos diagramas correctamente.

De acuerdo a dichas puntuaciones se obtiene la Figura 12, compuesta por un diagrama de barras y uno de caja. En el primero se muestran las puntuaciones totales por curso al que pertenecen los estudiantes y en la que apreciamos que los puntajes están concentrados entre 2 y 4 puntos, siendo este último el de mayor frecuencia. También, se observa un grupo importante de estudiantes que no contestan a la actividad, obteniendo 0 puntos. En el gráfico de cajas construido para estudiar las características de la dispersión de los puntajes, permite concluir que las puntuaciones de los estudiantes son similares para los dos cursos considerados. Esto lo vemos reflejado en la coincidencia de los cuartiles de ambos diagramas. La mediana se sitúa en la media teórica (3 puntos) y la moda (4) lo supera ligeramente, por lo que el desempeño de los estudiantes es medio.

Figura 12. Distribución de la puntuación total por curso



Conclusiones

Los resultados obtenidos en la construcción de diagramas de barras por estudiantes de 6° y 7° de Educación Básica en Chile, nos han permitido aproximarnos a los conocimientos que logran los estudiantes al finalizar un nivel educativo importante, y aportan resultados novedosos en el contexto chileno, que pueden ser utilizados en la formación de maestro de Educación Básica y para trabajarlos en clases con los estudiantes.

Los resultados nos permiten observar que existen diferencias en los niveles de éxito de acuerdo a la complejidad semiótica del gráfico a construir, como se refleja en el porcentaje de respuestas parcialmente correctas y correctas mucho mayor en la primera actividad (75,3%) que en la segunda (48,4%). Puesto que la diferencia es dar o no la distribución de frecuencias ya construida, creemos que el problema se presenta en la falta de comprensión de una parte importante de la muestra de la idea de frecuencia y distribución. Estos serán puntos que se deberán reforzar en la enseñanza del tema.

Al comparar con investigaciones previas, los resultados de la primera tarea son mejores que los alcanzados en algunas (Bivar, 2012; Fernandes et al., 2011). Para la segunda tarea se supera los Bivar (2012), pero son inferiores a los de Fernandes et al. (2011). También, nos llama la atención, el alto porcentaje de estudiantes que no realizan estas actividades. Finalmente, se observan diferencias entre el rendimiento de los estudiantes de 6° y 7° de Educación Básica, a favor de los primeros, lo que se puede deber a un efecto olvido.

Respecto a los errores que observamos, concuerdan con las descritas en investigaciones previas (e.g., Arteaga et al., 2016; Batanero et al., 2010; Bruno y Espinel, 2005; Cruz, 2013; Bivar, 2012; Fernandes et al., 2011; Ruiz, 2015; Wu, 2004). En las construcciones parcialmente correctas vemos el predominio de la ausencia de rótulos (59,2% en el primer ítem y 34,6% en el segundo) y en menor porcentaje los de barras con diferente ancho y/o separación, la omisión de valores y problemas de proporcionalidad en la escala. Dada la naturaleza de la tarea 2 es la que tiene mayor número de respuestas incorrectas, concretamente el caso la presentación de un listado de datos, uno a uno, sin resumir su distribución, es decir, que el estudiante se limita a representar cada uno de los datos (o un subconjunto), ya sea tal como se presente o realizando un ordenamiento.

En resumen, nuestros resultados evidencian la dificultad de la construcción de gráficos de barras para estos estudiantes chilenos, lo que se explica por la multitud de conceptos

subyacentes a los gráficos (variable, categoría, frecuencia, distribución, números, orden numérico, distancia, rectángulo, proporcionalidad, paralelismo y perpendicularidad entre otros) y la diversidad de convenios y elementos estructurales que tienen estas representaciones (eg., Kosslyn, 1985; Curcio, 1987, 1989; Friel et al., 2001). Es importante recordar que se trata de una representación que es usada comúnmente en los medios de comunicación (Cavalcanti et al., 2010) y la más frecuente en los libros de texto (Díaz-Levicoy et al., 2016). Además, las dos actividades que pueden ser consideradas como fáciles, puesto que en la primera se entregan los datos en un listado y no es necesario determinar las frecuencias; en la segunda, si bien se deben obtener las frecuencias, el rango numérico de los valores es limitado (0 a 4).

En consecuencia, la enseñanza de los gráficos estadísticos requiere prestar mayor atención a los conceptos involucrados. Por ejemplo, se debe dominar aspectos relativos al orden de los números naturales, así como su representación en la recta numérica. Otro aspecto importante es el concepto de proporcionalidad, porque muchos estudiantes no ven la necesidad de la correspondencia entre la proporcionalidad aritmética y geométrica. Finalmente es necesario ser riguroso con aspectos geométricos como el paralelismo que deben tener los lados de las barras, la congruencia de sus anchos y una distancia equidistante entre ellas.

Agradecimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER), Grupo FQM126 (Junta de Andalucía) y Beca CONICYT PFCHA 72150306.

Referencias

- Ainley, J., Pratt, D. & Nardi, E. (2001). Normalising: children's activity to construct meanings for trend. *Educational Studies in Mathematics*, 45(1-3), 131 – 146.
- Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. & Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(1), 15-40. DOI: <http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1911>
- Batanero, C., Arteaga, P. & Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154.
- Batarce, Y., Cáceres, B. & Kükenshöner, C. (2013). *Matemática 4º Básico. Tomo II*. Santiago: Santillana.
- Bivar, D. (2012). *Analisando a transformação entre gráficos e tabelas por alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental*. Tesis de Máster. Universidad Federal de Pernambuco, Brasil.
- Bruno, A. & Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio

- con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 7, 57-85.
- Cavalcanti, M. R., Natrielli, K. R. & Guimarães, G. (2010). Gráficos na mídia impressa. *Boletim de Educação Matemática*, 23(36), 733-751.
- Cruz, A. (2013). *Erros e dificuldades de alunos de 1.º ciclo na representação de dados estatísticos* (Tesis de Máster). Universidade de Lisboa, Portugal.
- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.
- Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: NCTM.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. & Gea, M. M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de primaria: Un estudio comparativo entre España y Chile. *Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 713-737. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a20>
- English, L. D. & Watson, J. M. (2015). Statistical literacy in the elementary school: Opportunities for problem posing. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: from research to effective practice* (pp. 241-256). New York: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_11
- Evangelista, B. (2014). *Aprendendo a representar escalas em gráficos: um estudo de intervenção* (Tesis de Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco, Brasil.
- Evangelista, B., Oliveira, F. S. & Ribeiro, P. M. (2014). Analisando a construção de gráficos de alunos do 5º ano do ensino fundamental. En CONEDU (Ed.), *Anais I Congresso Nacional de Educação* (pp. 1-5). Campina Grande: Realize.
- Fernandes, J. A. & Morais, P. C. (2011). Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 95-115.
- Fernandes, J. A., Morais, P. C. & Lacaz, T. V. S. (2011). Representação de dados através de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. En R. Borba, C. Monteiro & A. Ruiz (Eds.), *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (pp. 1-13). Recife: Universidade Federal de Pernambuco.
- Fernandes, R., Santos, G. & Pereira, R. (2017). Ensino e aprendizagem de gráficos e tabelas nos anos iniciais de escolarização. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 50, 41-61.
- Friel, S., Curcio, F. & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 32(2), 124-158.
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Guimarães, G. (2002). *Interpretando e construindo gráficos de barras* (Tesis doctoral). Universidade Federal de Pernambuco, Brasil.
- Jiménez-Castro, M. (2017). *Los gráficos estadísticos en el currículo y los libros de texto de Educación Primaria en Costa Rica* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, España.
- Kosslyn, S. M. (1985). Graphics and human information processing. *Journal of the American Statistical Association*, 80(391), 499-512.
- Li, D. Y. & Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics* 14(1), 2-8.

- MINEDUC (2012). *Matemática educación básica. Bases curriculares*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- Molina-Portillo, E., Contreras, J.M., Godino, J.D. & Ruz, F. (En prensa). Alfabetización estadística en la sociedad de la información. *BEIO. Boletín de estadística e investigación operativa*.
- Postigo, Y. & Pozo, J. I. (2000). Cuando una gráfica vale más que 1.000 datos: la interpretación de gráficas por alumnos adolescentes. *Infancia y Aprendizaje*, 90, 89-110. DOI: <https://doi.org/10.1174/021037000760087982>
- Ruiz, A. (2015). Un estudio de caso sobre errores y dificultades observadas en la elaboración de algunas gráficas estadísticas. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 10(1), 26-39. DOI: <https://doi.org/10.14483/jour.gdla.2015.1.a02>
- Salcedo, A. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto para Educación Primaria de Guatemala y Venezuela. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1141-1163.
- Sharma, S. (2013). Assessing students' understanding of tables and graphs: implications for teaching and research. *International Journal of Educational Research and Technology*, 4(4), 51-70.
- Silva, E. M. C. (2013). *Como são propostas pesquisas em livros didáticos de ciências e matemática dos anos iniciais do ensino fundamental* (Tesis de Mestrado). Universidad Federal de Pernambuco, Brasil.
- Watson, J. M. (2013). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Wilkinson, L. (2005). *The grammar of graphics*. New York: Springer.
- Wu, Y. (2004, Julio). *Singapore secondary school students' understanding of statistical graphs*. Trabajo presentado en el 10th International Congress on Mathematics Education. Copenhagen, Dinamarca.
- Zapico, M. (2007). Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. En MINEDUC (Ed.), *Primer Seminario Internacional de Textos Escolares (SITE 2006)* (pp. 149-155). Santiago: MINEDUC.

Autores:

Danilo Díaz-Levicoy

dddiaz01@hotmail.com

Profesor de Matemática y Computación, Universidad de los Lagos. Máster en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Doctorando en Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

Carmen Batanero

batanero@ugr.es

Licenciada en Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid. Doctora en Ciencias Matemáticas, Universidad de Granada.

Catedrática de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada.

Pedro Arteaga

parteaga@ugr.es

Licenciado en Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid. Máster y Doctor en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Profesor de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada.

España